MATRIKS DALAM KEHIDUPAN SEHARIAN

Prof Dr Nor Haniza Sarmin

Jabatan Sains Matematik

Fakulti Sains, UTM

nhs@utm.my

Biodata

- Berasal dari Pontian, Johor dan menetap di Skudai, Johor.
- Latar belakang pendidikan :

Sekolah Kebangsaan Kayu Ara Pasong, Pontian, Johor

SMK Sri Perhentian, Pontian, Johor

B.Sc (Hons), M.A., PhD (Mathematics) –

State University of New York at Binghamton, New York, USA

Pengalaman Bekerja

1991-1994 : Pensyarah di Universiti Teknologi Malaysia (UTM)

1995-1998 : Pengajian PhD

2002 : Professor Madya

2014 : Professor

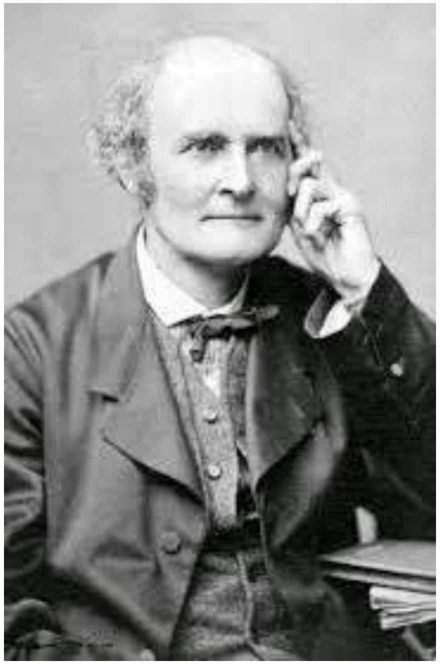
Pengalaman Bersama Persatuan Sains Matematik Malaysia (PERSAMA)

Ahli Seumur Hidup sejak 1998, Naib Presiden (2004-2019)

https://www.persama.org.my/

1. Olimpiad Matematik Kebangsaan
2. Kem Kecemerlangan Matematik PERSAMA-UTMJB 2011
3. Matemadesa
4. Simposium Kebangsaan Sains Matematik
5. Anugerah PERSAMA

Siapa Perkenalkan Matriks?



Arthur Cayley adalah ahli Matematik Inggeris yang memperkenalkan rumus Matriks pada tahun 1859 yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan linear.

Apa Itu Matriks?

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

- Satu matriks dengan m baris dan n lajur adalah sebuah jadual atau susunan berbentuk empat segi dengan jumlah bilangan unsur di dalamnya adalah m darab n.

Mengapa Matriks?

- Menyelesaikan masalah persamaan serentak.

$$\begin{aligned}-4x+5y&=32\\-3x+4y&=25\end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix}-4 & 5\\-3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\25\end{pmatrix}$$

Kaedah songsangan matriks

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{-4(4)-5(-3)}\begin{pmatrix}4 & -5\\3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32\\25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks

Matriks identiti

$$I_n = (a_{ij})_n$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & i \neq j \end{cases} \longrightarrow I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriks simetri

$$B = B^T \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks pepenjuru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks sifar

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

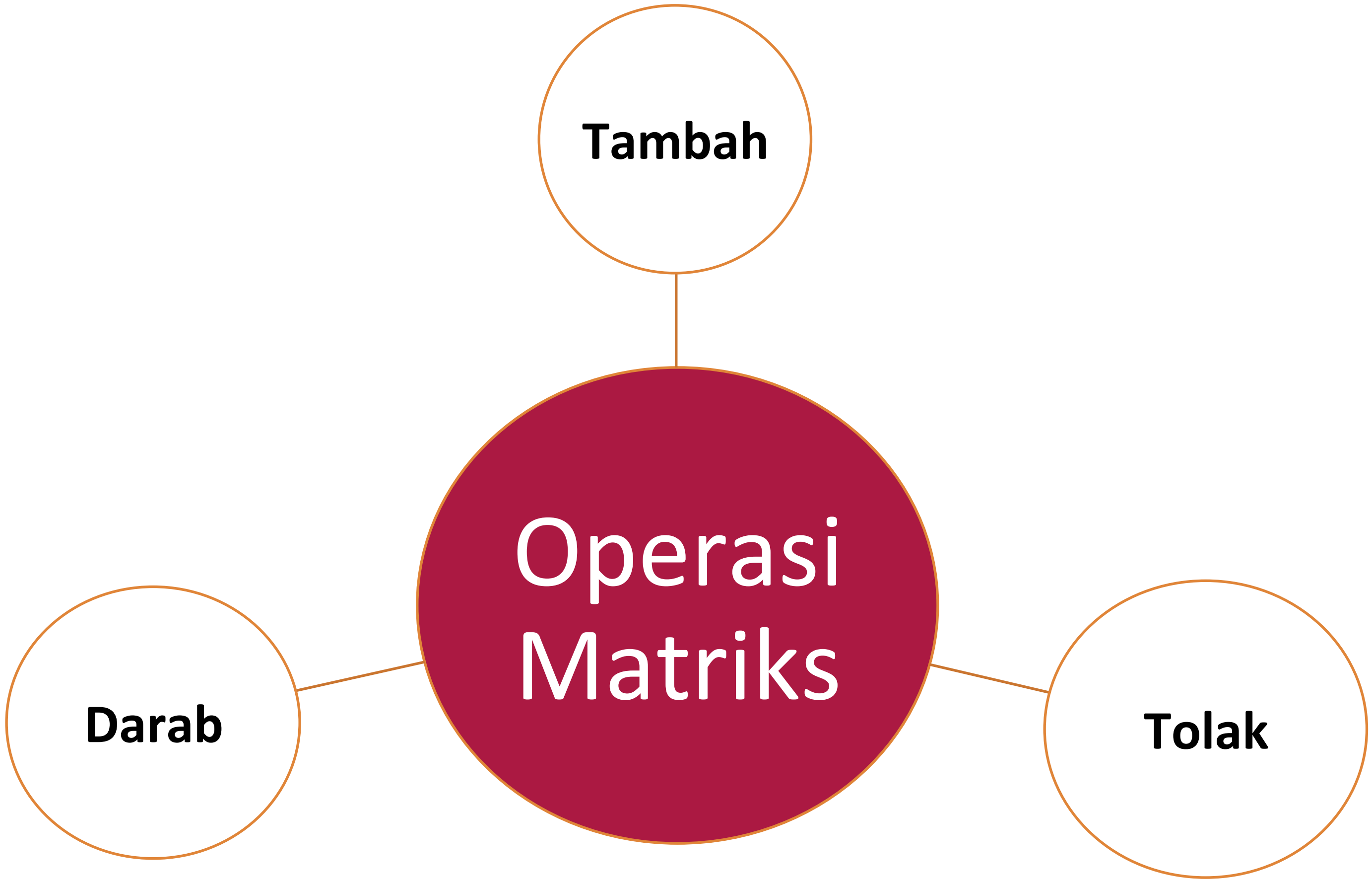
Peralihan matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \longrightarrow A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{in} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

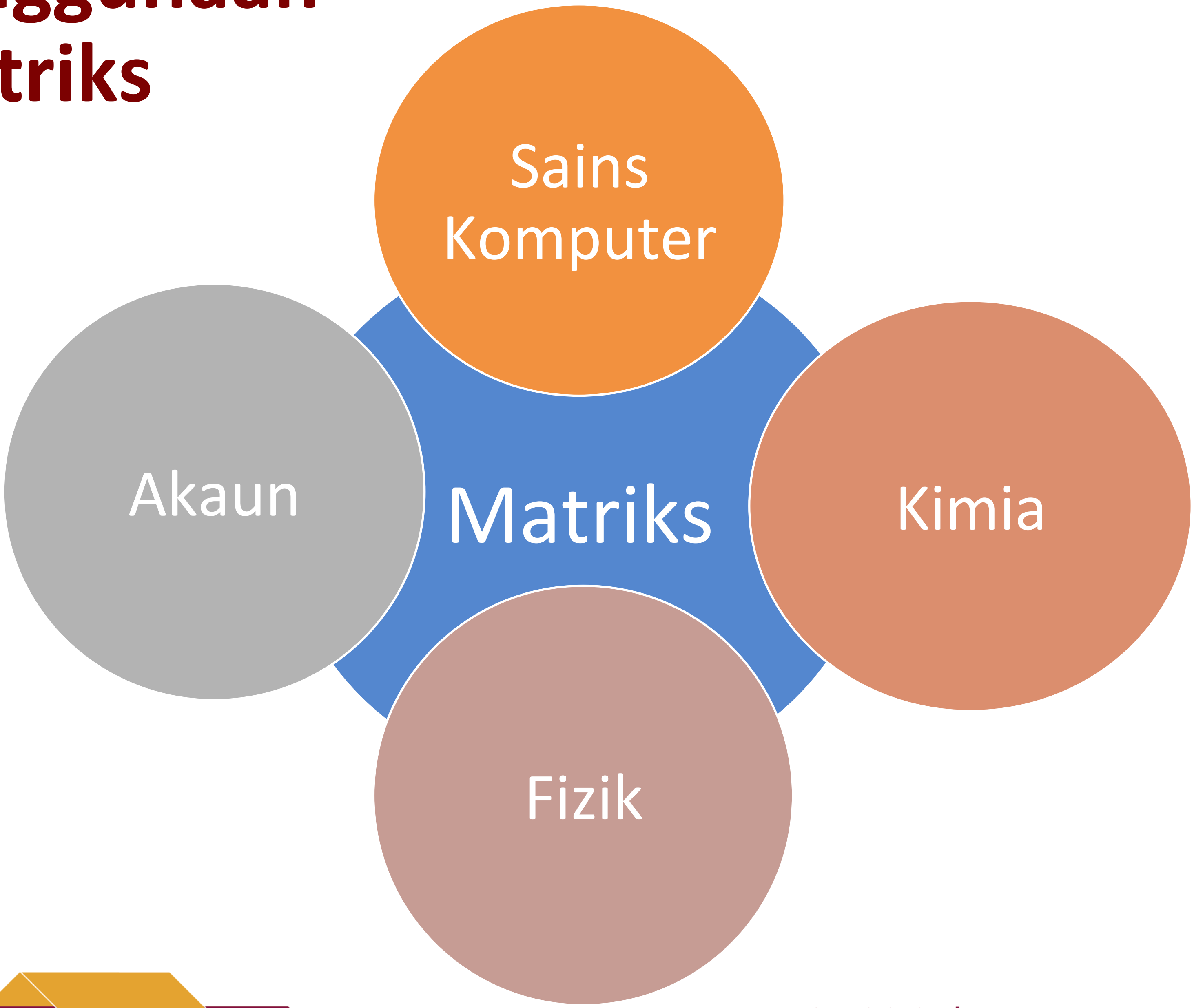
Matriks songsang

$$AB = BA = I_n$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$$

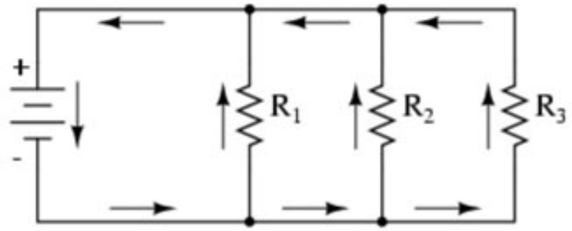

Tambah
Operasi Matriks
Darab
Tolak

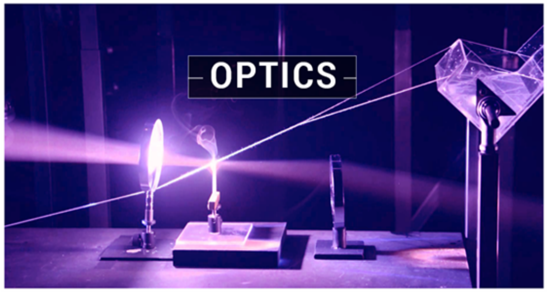
Penggunaan Matriks



Penggunaan Matriks

Fizik





Sains Komputer

Adobe Photoshop

Adobe Photoshop menggunakan matriks untuk memproses transformasi linear dan menghasilkan gambar.

Aljabar Linear

1. Matriks
2. Sistem Persamaan Linear
3. Ruang Vektor
4. Penjelmaan (Transformasi) Linear
5. Nilai Eigen, Vektor Eigen, Pemepenjuruan

Sistem Persamaan Linear

- Menyelesaikan persamaan linear menggunakan *Elementary Row Operation* (ERO).

1. Tukar antara dua baris, i dan j. $(R_i \leftrightarrow R_j)$
2. Darab baris dengan skala bukan sifar. $(kR_i, k \neq 0)$
3. Tambah satu baris dengan baris yang lain. $(kR_i + R_j)$

Sistem Persamaan Linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistem Persamaan Linear

$$3x-2y+2z=3$$
$$3x-2y+4z=5$$
$$x-2y-2z=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3R_1+R_3]{-3R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2+R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}R_3]{\frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2R_3+R_1]{-\frac{5}{2}R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2R_2+R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ruang Vektor

(a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \; a_{11} + a_{12} = 0, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \; a_{11} + a_{12} = 1, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \; a_{11}^2 + a_{12}^2 = 0, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

Penjelmaan Linear

Let θ be a fixed angle and $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a multiplication by the matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Clarify T geometrically.

If $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, then

$$T(v) = Av = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Example, if $\theta = 90°$, then

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ - 0 \\ \sin 90^\circ + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 - \sin 90^\circ \\ 0 + \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ - \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ + \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nilai Eigen, Vektor Eigen, Pemepenjuruan

Given $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{pmatrix}$. Find A^{10}.

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1}$$

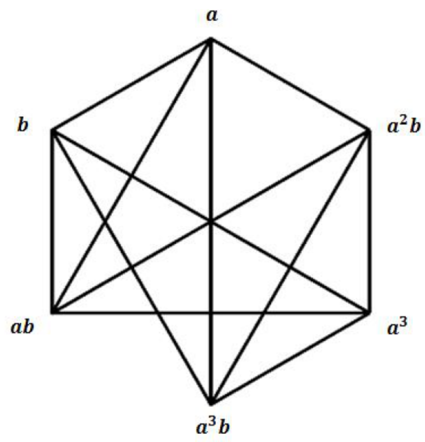
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^{10} & 0\\ 0 & (-1)^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}59049 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}59049 & 0\\ 118096 & 1\end{pmatrix}.$$

Aplikasi Matriks Yang Lebih Formal Dalam Pengajian Lebih Tinggi

- **Tenaga bagi graf**



$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

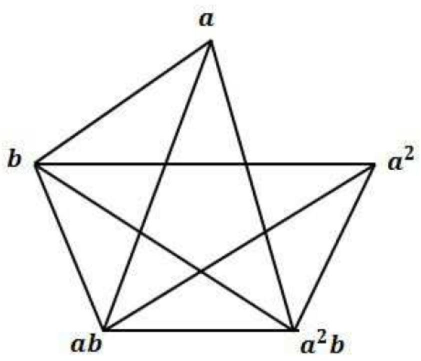
Matriks bersebelahan

Nilai eigen:
$\lambda_1 = 4,$
$\lambda_2 = \lambda_3 = -2,$
$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$

Tenaga graf : $\varepsilon(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$

$$\varepsilon(\Gamma) = 4 + 2|-2| + 3|0| = 8.$$

- **Indeks Topologi**



$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks jarak

Indeks Wiener, $W(\Gamma)$:

$$W(\Gamma) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d(i,j),$$

$d(i,j)$ adalah jarak antara dua bucu dan n adalah jumlah bucu pada graf.

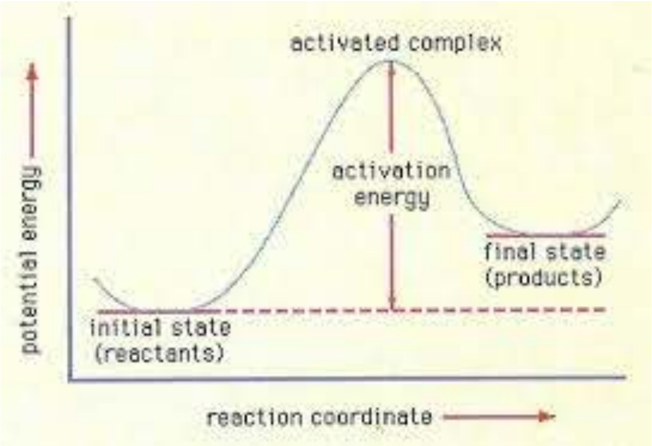
ATAU

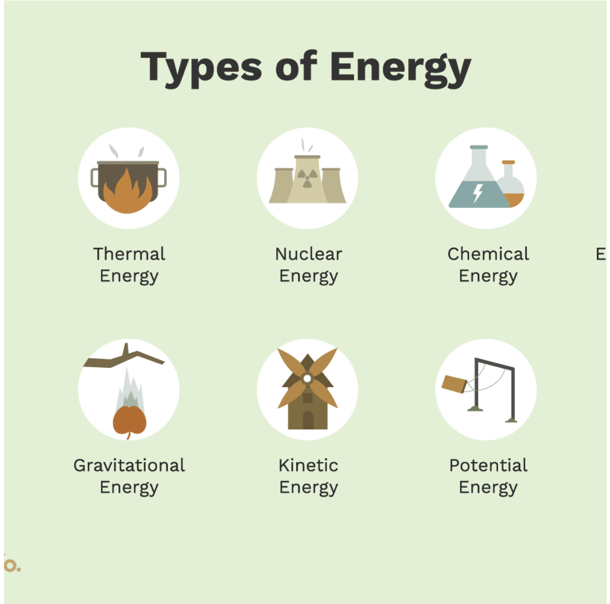
$W(\Gamma)$ adalah setengah daripada jumlah semua entri dalam matriks jarak.

Jumlah entri D ialah 22.

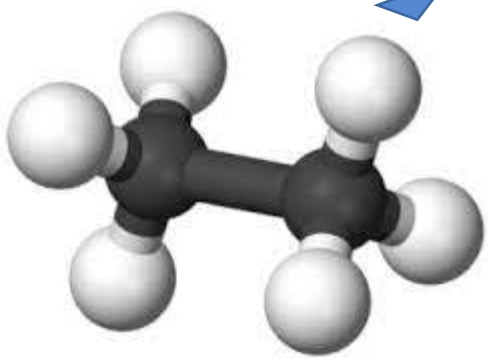
$$W(\Gamma) = \frac{1}{2}(22)$$
$$= 11.$$

Aplikasi Matriks Dalam Bidang Kimia





Aplikasi Matriks Dalam Bidang Kimia



Ethane

Aplikasi Matriks Dalam Bidang-bidang Lain

Bidang ekonomi	Menganalisis *input-output* dari pelbagai sektor.
Bidang perniagaan	Penggunaan matriks dalam merancang pengurusan yang strategik dan strategi pemasaran.
Bidang teori permainan	Merancang strategi yang baik semasa permainan.

TERIMA KASIH!