PERSAMAAN PEMBEZA SEPARA

Partial Differential Equations

- Suatu persamaan dikatakan Persamaan Pembeza Separa (*PPS*) jika persamaan tersebut merupakan suatu kaitan terbitan sebuah fungsi dengan fungsi tersebut dan beberapa pembolehubah.

- PPS peringkat kedua yang umum boleh ditulis sebagai berikut:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

- atau

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

- dalam pembolehubah x dan y dengan A, B, C, D, E, F dan G adalah fungsi dalam sebutan x dan y

- *PPS* dikelaskan dalam tiga jenis iaitu:

$$\left.\begin{array}{c} eliptik \\ parabolik \\ hiperbolik \end{array}\right\} \quad jika \quad B^2 - 4AC \quad \left\{\begin{array}{l} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array}\right.$$

PPS eliptik

Terdiri daripada persamaan *Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dalam pembolehubah x dan y.

PPS eliptik

dan *Poisson* iaitu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

dalam pembolehubah x dan y.

Di sini, $A = C = 1$ dan $B = 0$.

Maka

$$B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(1) = -4 < 0$$

PPS parabolik

- *persamaan Haba*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

- *dalam pembolehubah x dan t.*

- Di sini, *A = 1 dan B = C = 0.*
- maka

$$B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(0) = 0$$

PPS hiperbolik

- *persamaan Gelombang*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- *dalam pembolehubah x dan y.*

- *Di sini, A = 1, B = 0 dan* $C = -\alpha^2$
- *Maka*

$$B^2 - 4AC = 0 - 4(1)(-\alpha^2) = 4\alpha^2 > 0$$

- Kita akan menggunakan Kaedah Beza Terhingga (*KBT*) dalam menyelesaikan masalah PPS dengan domain (kawasan) segiempat

$$0 \leq x \leq a$$

dan

$$0 \leq y \leq b$$

- Untuk memudahkan kiraan, kita akan bahagikan selang

$$0 \le x \le a$$

kepada M

dan $$0 \le y \le b$$

kepada N jalur iaitu dengan keadaan

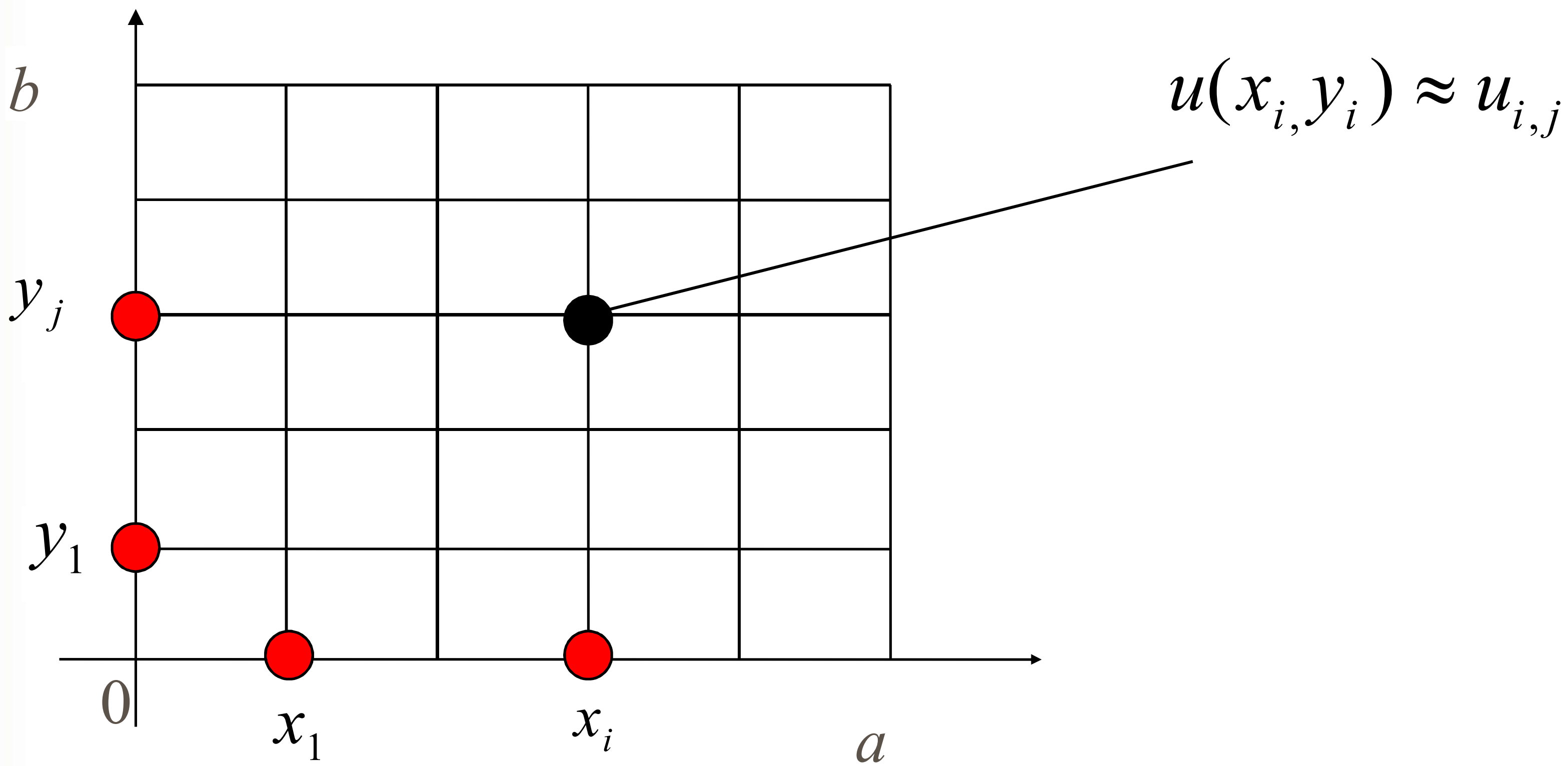
$$h = a/M \text{ dan } k = b/N.$$

- Maka titik pada masing-masing paksi adalah sebagai berikut:

Pada paksi-x: $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, M$.

Pada paksi-y: $y_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Domain penyelesaian boleh digambarkan seperti berikut:



- Kita akan menggunakan tandaan

$$u_{i,j}$$

bagi penyelesaian berangka kepada penyelesaian tepat

$$u(x_i, y_j)$$

pada titik (x_i, y_j)

Persamaan Eliptik

- Persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

atau $$\nabla^2 u = 0$$

atau $$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

- Pertimbangkan persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \le x \le a \quad 0 \le y \le b$$

dengan syarat sempadan

$$u(0, y) = g_1(y) \qquad u(a, y) = g_2(y) \qquad 0 \le y \le b$$

$$u(x,0) = g_3(x) \qquad u(x, b) = g_4(x) \qquad 0 \le x \le a$$

Kaedah Beza Terhingga (KBT)

- Dengan KBT, persamaan Laplace di titik (x_i, y_j) ialah

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = 0$$

- dihampiri oleh

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

- Untuk memudahkan pengiraan, ambil $h=k$ dan ini memberikan persamaan

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = 0$$

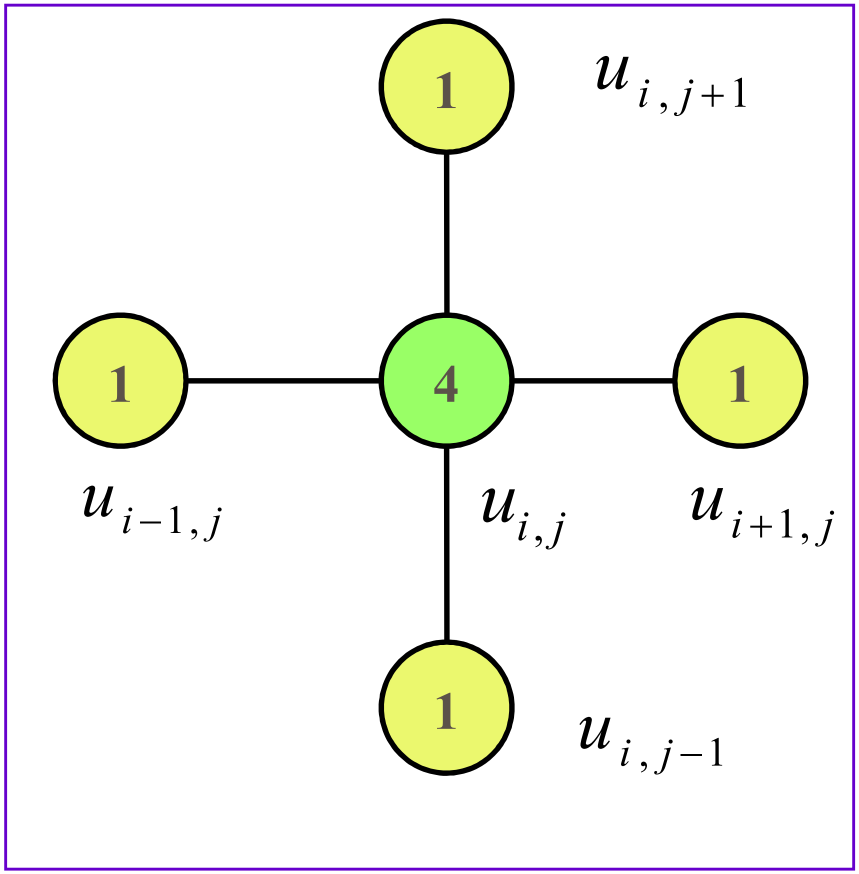
iaitu

$$4u_{i,j} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}$$

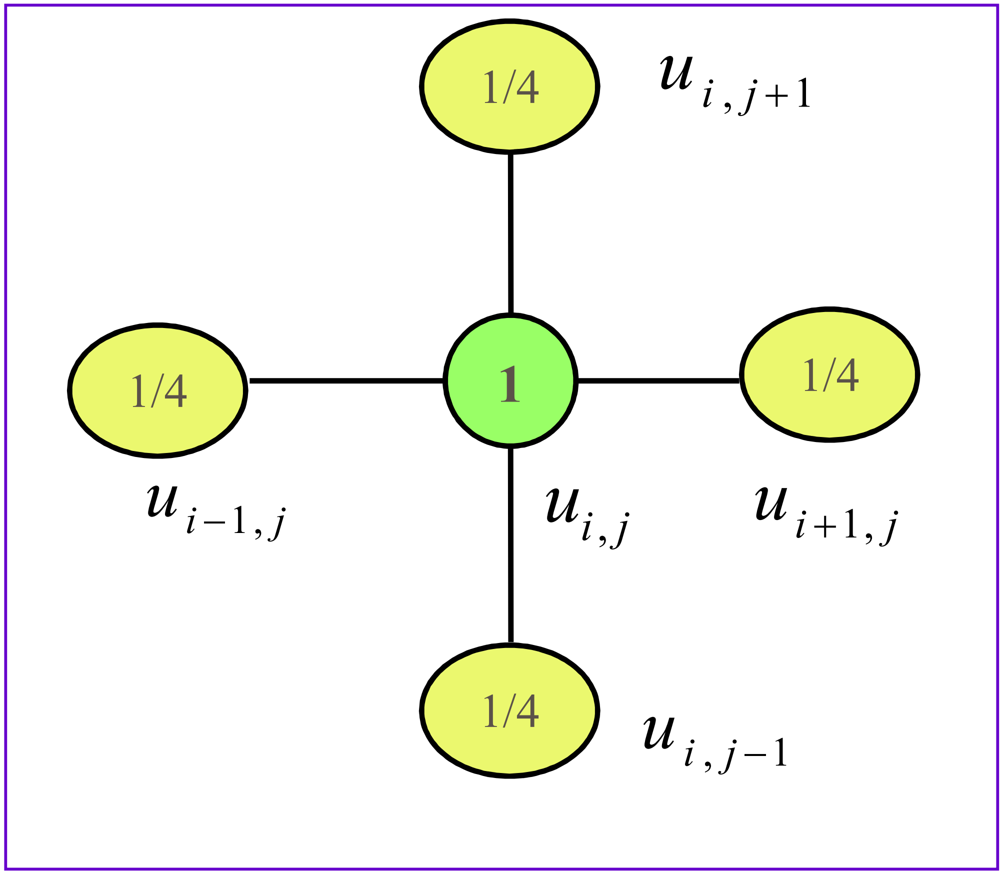
- atau

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left[u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right]$$

Gambarajah molekul



Gambarajah molekul



contoh

- Bagi persamaan *Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$$

- dengan syarat sempadan

$$u(x,0) = x(x-1) \qquad u(x,1) = 0 \qquad 0 < x < 1$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0 \qquad 0 \le y \le 1$$

- dapatkan *SPL* dengan menggunakan *KBT*.
- Ambil $h = k = \frac{1}{3}$
- Selesaikan *SPL* yang diperolehi dengan menggunakan kaedah Gauss-Seidel dengan mengambil nilai awal $u^{(0)} = 0$

Penyelesaian

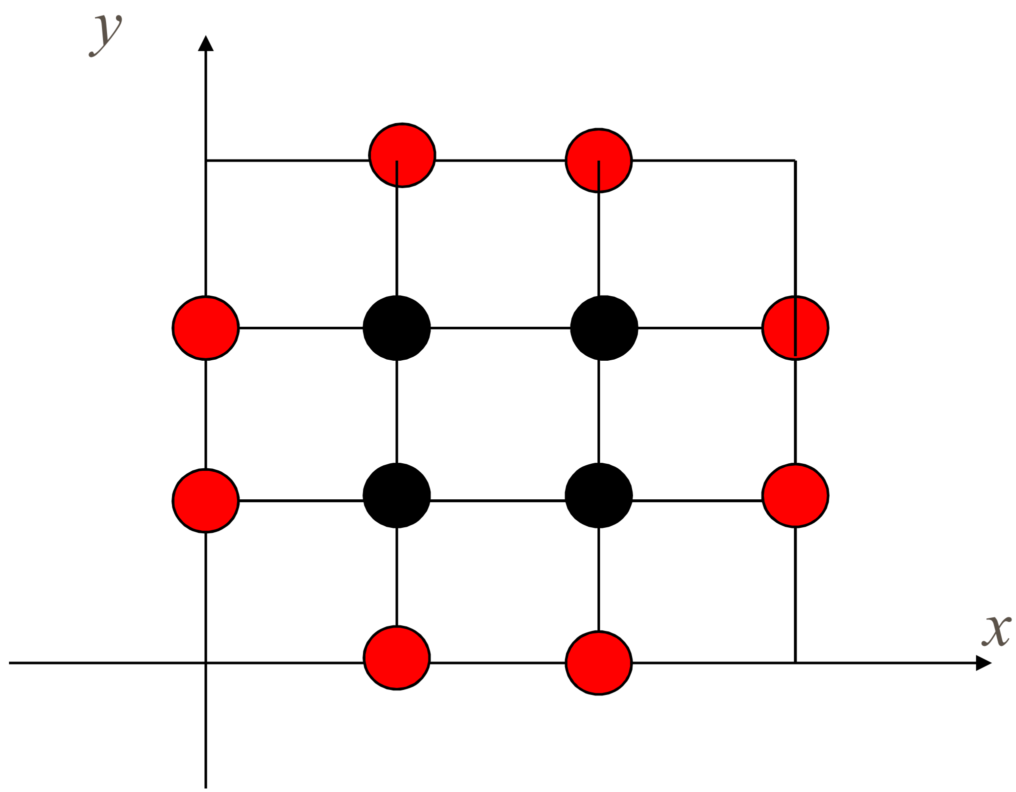
Diberikan,

$$h = k = \frac{1}{3}$$

maka

$$x_i = \frac{1}{3} i \qquad \text{dan} \qquad y_j = \frac{1}{3} j$$

$i, j = 0, 1, 2, 3$ seperti dalam Rajah



y
x

Pengiraan nilai-nilai sempadan bawah

- Sempadan bawah: $u(x,0) = x(x-1)$

$$u_{1,0} = u\left(\frac{1}{3},0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{2}{9} = -0.222$$

$$u_{2,0} = u\left(\frac{2}{3},0\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right) = -\frac{2}{9} = -0.222$$

Pengiraan nilai-nilai sempadan atas

- Sempadan atas: $u(x,1) = 0$

$$u_{1,3} = u\left(\frac{1}{3},1\right) = 0.000$$

$$u_{2,3} = u\left(\frac{2}{3},1\right) = 0.000$$

Pengiraan nilai-nilai sempadan kiri

- Sempadan kiri: $u(0, y) = 0$

$$u_{0,0} = u(0,0) = 0.000 \qquad u_{0,1} = u\left(0, \frac{1}{3}\right) = 0.000$$

$$u_{0,2} = u\left(0, \frac{2}{3}\right) = 0.000 \qquad u_{0,3} = u(0,1) = 0.000$$

Pengiraan nilai-nilai sempadan kanan

- Sempadan kanan: $u(1, y) = 0$

$$u_{3,0} = u(1,0) = 0.000 \qquad u_{3,1} = u\left(1, \frac{1}{3}\right) = 0.000$$

$$u_{3,2} = u\left(1, \frac{2}{3}\right) = 0.000 \qquad u_{3,3} = u(1,1) = 0.000$$

- Daripada rajah, kita ingin mendapatkan u_{11}, u_{12}, u_{21} dan u_{22}
- Dengan menggunakan *KBT*, oleh kerana $h=k$ diperolehi

$$4u_{i,j} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}$$

- maka

$$
\begin{aligned}
4u_{1,1} &= u_{0,1} + u_{2,1} + u_{1,0} + u_{1,2} \\
&= 0 + u_{2,1} - 0.222 + u_{1,2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{1,2} = -0.222}$$

$$4u_{2,1} = u_{1,1} + u_{3,1} + u_{2,0} + u_{2,2}$$
$$= u_{1,1} + 0 - 0.222 + u_{2,2}$$

$$\boxed{-u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{2,2} = -0.222}$$

$$4u_{1,2} = u_{0,2} + u_{2,2} + u_{1,1} + u_{1,3}$$
$$= 0 + u_{2,2} + u_{1,1} + 0$$

$$\boxed{-u_{1,1} + 4u_{1,2} - u_{2,2} = 0}$$

$$
\begin{aligned}
4u_{2,2} &= u_{1,2} + u_{3,2} + u_{2,1} + u_{2,3} \\
&= u_{1,2} + 0 + u_{2,1} + 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{-u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{2,2} = 0}
$$

SPL yang terhasil adalah

$$4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{1,2} = -0.222$$

$$-u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{2,2} = -0.222$$

$$-u_{1,1} + 4u_{1,2} - u_{2,2} = 0$$

$$-u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{2,2} = 0$$

Dalam bentuk matriks *Au=b*

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.222 \\ -0.222 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rumus lelaran Gauss-Seidel adalah

$$u_{1,1}^{(n+1)} = \frac{u_{2,1}^{(n)} + u_{1,2}^{(n)} - 0.222}{4}$$

$$u_{2,1}^{(n+1)} = \frac{u_{1,1}^{(n+1)} + u_{2,2}^{(n)} - 0.222}{4}$$

$$u_{1,2}^{(n+1)} = \frac{u_{1,1}^{(n+1)} + u_{2,2}^{(n)}}{4}$$

$$u_{2,2}^{(n+1)} = \frac{u_{2,1}^{(n+1)} + u_{1,2}^{(n+1)}}{4}$$

Dengan mengambil $u^{(0)} = 0$, kiraan adalah seperti berikut:

n	$u_{1,1}^{(n)}$	$u_{2,1}^{(n)}$	$u_{1,2}^{(n)}$	$u_{2,2}^{(n)}$
0	0	0	0	0
1	-0.056	-0.070	-0.014	-0.021
2	-0.077	-0.080	-0.025	-0.026
3	-0.082	-0.083	-0.027	-0.028
4	-0.083	-0.083	-0.028	-0.028
5	-0.083	-0.083	-0.028	-0.028

- maka

$$u_{1,1} = -0.083, \quad u_{2,1} = -0.083, \quad u_{1,2} = -0.028$$

dan $$u_{2,2} = -0.028$$

latihan

Persamaan Laplace $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Dengan syarat sempadan,

$$u(x,y) = \begin{cases} 0 & jika \quad x = 0, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & jika \quad x = 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & jika \quad y = 1, \quad 0 \le x \le 1 \\ \sin \pi x & jika \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

- Selesaikan dengan menggunakan KBT berserta Kaedah Lelaran Gauss-Seidel dengan mengambil $h=k=1/3$ dan $u^{(0)}=0$.
- Buat kiraan dalam 4TP.